MIT
OpenCourseWare
http://ocw.mit.edu

Thông lượng, dạng chuẩn tắc của định lí Green
18.02 Multivariable Calculus, Fall 2007
Transcript – Lecture 23

Thông lượng, dạng chuẩn tắc của định lí Green

Xem bài giảng tại đây:
http://www.mientayvn.com/OCW/MIT/giai_tich_nhieu_bien.html

If you need more copies of the practice exams, I have more here. There is quite a bit of stuff to do today. Today I am going to tell you about flux of a vector field for a curve. In case you have seen flux in physics, probably you have seen flux in space, and we are going to come to that in a couple of weeks, but for now we are still doing everything in the plane. So bear with me if you have seen a more complicated version of flux. We are going to do the easy one first. What is flux? Well, flux is actually another kind of line integral.

Nếu bạn nào cần thêm bản photo của các bài kiểm tra thử, ở đây còn một số bản. Có một chút công việc cần làm hôm nay. Hôm nay tôi sẽ đề cập đến thông lượng của trường vectơ đối với một đường cong. Trong trường hợp bạn đã gặp thông lượng trong vật lý, có thể bạn đã thấy thông lượng trong không gian, và chúng ta sẽ đến đó trong vài tuần, nhưng bây giờ chúng ta vẫn đang làm mọi thứ trong mặt phẳng. Vâng hãy cố chịu đựng nếu bạn đã gặp một phiên bản phức tạp hơn của thông lượng. Trước hết, chúng ta sẽ làm cái dễ. Thông lượng là gì? Vâng, thông lượng thực sự là một loại tích phân đường khác.

Let's say that I have a plane curve and a vector field in the plane. Then the flux of F across a curve C is, by definition, a line integral, but I will use notation F dot n ds. I have to explain to you what it means, but let me first box that because that is the important formula to remember. That is the definition. What does that mean? First, mostly I have to tell you what this little n is.

Giả sử rằng tôi có một đường cong trong mặt phẳng và một trường vector trong mặt phẳng. Thế thì, theo định nghĩa, thông lượng của F qua đường cong C là, tích phân đường, nhưng tôi sẽ sử dụng ký hiệu F nhân vô hướng n ds. Tôi sẽ giải thích cho bạn ý nghĩa của nó, nhưng trước hết tôi sẽ đóng khung nó vì đó là một công thức quan trọng cần nhớ. Đó là định nghĩa. Ý nghĩa của nó là gì? Trước tiên, tôi sẽ giải thích cho bạn n nhỏ là gì.

The notation suggests it is a normal vector, so what does that mean? I have a curve in the plane and I have a vector field. Let's see. The vector field will be yellow today. And I will want to integrate along the curve the dot product of F with the normal vector to the curve, a unit normal vector to the curve. That means a vector that is at every point of the curve perpendicular to the curve and has length one.

Nó là kí hiệu của vector pháp tuyến, vậy ý nghĩa của nó là gì? Tôi có một đường cong trong mặt phẳng và tôi có một trường vectơ. Xem nào. Trường vector sẽ là màu vàng hôm nay. Và tôi muốn lấy tích phân dọc theo đường cong của tích vô hướng của F với vector pháp tuyến của đường cong, vector pháp tuyến đơn vị của đường cong. Nó là vector ở tại mỗi điểm vuông góc với đường cong và có chiều dài bằng một.

N everywhere will be the unit normal vector to the curve C pointing 90 degrees clockwise from T. What does that mean? That means I have two normal vectors, one that is pointing this way, one that is pointing that way. I have to choose a convention. And the convention is that the normal vector that I take goes to the right of the curve as I am traveling along the curve. You mentioned that you were walking along this curve, then you look to your right, that is that direction. What we will do is just, at every point along the curve, the dot product between the vector field and the normal vector. And we will sum that along the various pieces of the curve.

Ở khắp mọi nơi n sẽ là vector pháp tuyến đơn vị của đường cong C hướng 90 độ cùng chiều kim đồng hồ từ T. Điều đó nghĩa là gì? Có nghĩa là tôi có hai vector pháp tuyến, một cái hướng theo đường này, một cái theo hướng đó. Tôi phải chọn một quy ước. Và quy ước là vector pháp tuyến mà tôi chọn là vector hướng sang bên phải đường cong khi tôi di chuyển dọc theo đường cong. Tức là nếu bạn đi dọc theo đường cong, thì khi bạn nhìn sang phải, nó là hướng đó. Những gì chúng ta sẽ làm chỉ là, tại mỗi điểm dọc theo đường cong, tích vô hướng giữa trường vector và vector pháp tuyến. Và chúng ta sẽ cộng chúng dọc theo những đoạn khác nhau của đường cong.

What this notation means is that if we actually break C into small pieces of length delta(s) then the flux will be the limit, as the pieces become smaller and smaller, of the sum of F dot n delta S. I take each small piece of my curve, I do the dot product between F and n and I multiply by the length of a piece. And then I add these together. That is what the line integral means. Of course that is, again, not how I will compute it. Just to compare this with work, conceptually it is similar to the line integral we did for work except the line integral for work –

Kí hiệu này có nghĩa là là nếu chúng ta chia C thành những đoạn nhỏ chiều dài delta(s) thì thông lượng sẽ là giới hạn, khi các đoạn ngày càng nhỏ hơn, của tổng của F nhân vô hướng n delta S. Tôi lấy mỗi đoạn nhỏ của đường cong, tôi thực hiện tích vô hướng giữa F và n và tôi nhân với chiều dài của đoạn đó. Và sau đó tôi cộng những cái này với nhau. Đó là những gì tích phân đường nói. Tất nhiên đó, một lần nữa, không phải là cách tính nó. Chỉ cần so sánh cái này với công, đó là khái niệm tương tự như tích phân đường mà chúng ta đã làm đối với công

Work is the line integral of F dot dr, which is also the line integral of F dot T ds. That is how we reformulated it. That means we take our curve and we figure out at each point how big the tangent component -- I guess I should probably take the same vector field as before. Let's see. My field was pointing more like that way. What I do at any point is project F to the tangent direction, I figure out how much F is going along my curve and then I sum these things together. I am actually summing --

Công là tích phân đường của F nhân vô hướng với dr, nó cũng là tích phân đường của F nhân vô hướng với T ds. Đó chỉ là một sự biến đổi công thức. Điều đó có nghĩa là chúng ta lấy đường cong của chúng ta và tại mỗi điểm chúng ta chỉ ra thành phần tiếp tuyến lớn như thế nào - Tôi đoán có lẽ tôi nên lấy trường vector tương tự như trước. Xem nào. Trường vector của tôi đang hướng như thế. Tại mọi điểm, tôi chiếu F lên hướng tiếp tuyến, tôi tìm giá trị của F dọc theo đường cong của tôi là bao nhiêu và sau đó tôi cộng những thứ này với nhau. Tôi thực sự lấy tổng-

-- the tangential component of my field F. Roughly-speaking the work measures, you know, when I move along my curve, how much I am going with or against F. Flux, on the other hand, measures, when I go along the curve, roughly how much the field is going to across the curve. Counting positively what goes to the right, negatively what goes to the left. Flux is integral F dot n ds, and that one corresponds to summing the normal component of a vector field. But apart from that conceptually it is the same kind of thing.

- thành phần tiếp tuyến của trường F. Nói một cách gần đúng công đo, bạn đã biết, khi tôi di chuyển dọc theo đường cong của tôi, tôi sẽ đi cùng với hoặc ngược lại F bao nhiêu. Mặt khác, thông lượng, đo, khi tôi đi dọc theo đường cong, nói một cách gần đúng trường đi qua đường cong bao nhiêu. Tính là dương cho những gì đi sang phải, âm cho những gì đi sang trái. Thông lượng là tích phân của F nhân vô hướng n ds, và nó tương ứng với sự lấy tổng thành phần pháp tuyến của một trường vector. Nhưng ngoại trừ điều đó ra, nó là khái niệm hơi tương tự.

Just the physical interpretations will be very different, but for a mathematician these are two line integrals that you set up and compute in pretty much the same way. Let's see. I should probably tell you what it means. Why do we make this definition? What does it correspond to? Well, the interpretation for work made a lot of sense when F was representing a force. The line integral was actually the work done by the force. The interpretation for flux makes more sense if you think of F as a velocity field. What is the interpretation?

Chỉ là sự khác nhau về ý nghĩa vật lí, nhưng đối với một nhà toán học đây là hai tích phân đường mà bạn thiết lập và tính nó theo cách khá giống nhau. Xem nào. Tôi sẽ cho bạn biết ý nghĩa của nó. Tại sao chúng ta tạo ra định nghĩa này? Nó tương ứng với cái gì? Vâng, trong cách diễn giải về công, F biểu diễn một lực. Trong trường hợp đó, tích phân đường thực sự là công được thực hiện bởi lực. Còn thông lượng lại có nhiều ý nghĩa hơn nếu bạn xem F là một trường vận tốc. Ý nghĩa gì?

Let's say that for F is a velocity field. That means I am thinking of some fluid that is moving, maybe water or something, and it is moving at a certain speed. And my vector field represents how things are moving at every point of the plane. I claim that flux measures how much fluid passes through -- -- the curve C per unit time. If you imagine that maybe you have a river and you are somehow building a damn here, a damn with holes in it so that the water still passes through, then this measures how much water passes through your membrane per unit time. Let's try to figure out why this is true.

Giả sử rằng F là trường vận tốc. Điều đó có nghĩa là tôi đang nghĩ về một chất lỏng nào đó đang chuyển động, nước hay gì đó, và nó đang chuyển động với một tốc độ nào đó. Và trường vector của tôi biểu diễn các thứ đang chuyển động như thế nào tại mỗi điểm của mặt phẳng. Tôi cho rằng thông lượng đo bao nhiêu chất lỏng đi qua - - đường cong C trên một đơn vị thời gian. Nếu bạn tưởng tượng rằng có một con sông nào đó và bạn xây một cái cống ở đây, cống có các lỗ trong nó để nước vẫn đi qua, thì cái này sẽ đo lượng nước qua màng trên một đơn vị thời gian. Hãy thử chỉ ra lí do tại sao như vậy.

Why does this make sense? Let's look at what happens on a small portion of our curve C. I am zooming in on my curve C. I guess I need to zoom further. That is a little piece of my curve, of length delta S, and there is a fluid flow. On my picture things are flowing to the right. Here I am drawing a constant vector field because if you zoom in enough then your vectors will pretty much be the same everywhere. If you enlarge the picture enough then things will be pretty much a uniform flow. Now, how much stuff goes through this little piece of curve per unit time? Well, what happens over time is the fluid is moving while my curve is staying the same place so it corresponds to something like this.

Tại sao lại như vậy? Hãy xét những gì xảy ra trên một phần nhỏ của đường cong C. Tôi đang phóng to đường cong C. Tôi đoán tôi cần phải phóng to thêm nữa. Đó là một đoạn nhỏ của đường cong, chiều dài delta S, và có một chất lỏng chảy qua. Trên hình của tôi nó đang chảy về bên phải. Ở đây tôi sẽ vẽ một trường vectơ hằng số bởi vì nếu bạn phóng to lên thì ở cùng một nơi có thể có quá nhiều vector. Nếu bạn phóng đủ to hình thì dòng chảy sẽ gần như đều. Bây giờ, lượng đi qua một đoạn nhỏ của đường cong trên một đơn vị thời gian là bao nhiêu? Vâng, những gì xảy ra theo thời gian là chất lỏng đang chuyển động trong khi đường cong vẫn nằm yên vì vậy nó tương ứng với thứ gì đó như thế này.

I claim that what goes through C in unit time is actually going to be a parallelogram. Here is a better picture. I claim that what will be going through C is this shaded parallelogram to the left of C. Let's see. If I move for unit time it works. That is the stuff that goes through my curve, for a small portion of curve in unit time. And, of course, I would need to add all of these together to get the entire curve. Let's try to understand how big this parallelogram is. To know how big this parallelogram is I would like to use base times height or something like that. And maybe I want to actually flip my picture so that the base and the height make more sense to me.

Tôi cho rằng những gì đi qua C trên một đơn vị thời gian thực sự sẽ là một hình bình hành. Dưới đây là hình ảnh tốt hơn. Tôi cho rằng những gì đi qua C là hình bình hành được tô này ở bên trái của C. Xem nào. Nếu tôi chuyển động khoảng một đơn vị thời gian nó hoạt đúng. Đó là những thứ đi qua đường cong của tôi, đối với một phần nhỏ của đường cong trên một đơn vị thời gian. Và, tất nhiên, tôi sẽ cần cộng tất cả những cái này với nhau để nhận được toàn bộ đường cong. Hãy thử xem hình bình hành này lớn như thế nào. Để biết hình bình hành lớn như thế nào tôi lấy cạnh đáy nhân chiều cao. Và có thể tôi muốn quay hình của tôi để cạnh đáy và chiều cao dễ thấy hơn.

Let me actually turn it this way. And, in case you have trouble reading the rotated picture, let me redo it on the board. What passes through a portion of C in unit time is the contents of a parallelogram whose base is on C. So it has length delta s. That is a piece of C. And the other side is going to be given by my velocity vector F. And to find the height of this thing, I need to know what actually the normal component of this vector is. If I call n the unit normal vector to the curve then the area is base times height.

Hãy để tôi chuyển nó thành như thế này. Và, trong trường hợp bạn gặp khó khăn khi xem hình bị quay, hãy để tôi làm lại nó trên bảng. Những gì đi qua một phần của C trong một đơn vị thời gian là diện tích của hình bình hành có cạnh đáy nằm trên C. Vì vậy, nó có chiều dài delta s. Đó là một đoạn của C. Và cạnh còn lại là vector vận tốc F. Và để tìm chiều cao của cái này, tôi cần phải biết thành phần pháp tuyến của vector này là gì. Nếu tôi gọi n là vector đơn vị pháp tuyến của đường cong thì diện tích bằng cạnh đáy nhân chiều cao.

The base is delta S and the height is the normal component of F, so it is F dot n. And so you see that when you sum these things together you get, what I said, flux. Now, if you are worried about the fact that actually -- If your unit time is too long then of course things might start changing as it flows. You have to take the time unit and the length unit that are sufficiently small so that really this approximation where C is a straight line and where flow is at constant speed are valid. You want to take maybe a segment here that is a few micrometers. And the time unit might be a few nanoseconds or whatever, and then it is a good approximation.
Cạnh đáy là delta S và chiều cao là thành phần pháp tuyến của F, do đó nó là F nhân vô hướng với n. Và do đó, bạn thấy rằng khi bạn cộng những thứ này với nhau bạn nhận được, những gì tôi đã nói, thông lượng. Bây giờ, nếu bạn đang lo lắng về việc thực sự - Nếu đơn vị thời gian của bạn quá dài thì tất nhiên các thứ có thể bắt đầu thay đổi khi nó chảy. Bạn phải chọn đơn vị thời gian và đơn vị chiều dài đủ nhỏ để phép gần đúng này ở đây C là đường thẳng và dòng chảy với tốc độ không đổi là hợp lệ. Bạn muốn lấy một đoạn ở đây cỡ vài micromet. Và đơn vị thời gian có thể là vài nano giây hay gì đó, và thế thì nó là một phép gần đúng tốt.

What I mean by per unit time is, well, actually, that works, but you want to think of a really, really small time. And then the amount of matter that passes in that really, really small time is the flux times the amount of time. Let's be a tiny bit more careful. And what I am saying is the amount of stuff that passes through C depends actually on whether n is going this way or the opposite way.
Đơn vị thời gian nghĩa là gì, vâng, thực sự, điều đó đúng, nhưng bạn phải suy nghĩ về một thời gian thực sự, thực sự nhỏ. Và thế thì lượng vật chất đi vào trong đó thực sự, thời gian thực sự nhỏ là thông lượng nhân lượng thời gian. Hãy cẩn thận hơn một chút. Và những gì tôi nói là lượng vật chất đi qua C thực sự phụ thuộc vào n đi theo hướng này hay hướng ngược lại.

Actually, what is implicit in this explanation is that I am counting positively all the stuff that flows across C in the direction of n and negatively what flows in the opposite direction. What flows to the right of C, well, across C from left to right is counted positively. While what flows right to left is counted negatively. So, in fact, it is the net flow through C per unit time. Any questions about the definition or the interpretation or things like that? Yes?
Thực sự, cách giải thích này ám chỉ rằng tôi sẽ tính là dương cho tất cả vật chất chảy qua C theo hướng của n và âm khi chảy ngược lại. Những gì chảy sang bên phải của C, vâng, qua C từ trái sang phải được tính là dương. Trong khi những gì chảy từ phải sang trái được tính là âm. Vì vậy, trên thực tế, nó là dòng chảy toàn phần qua C trên một đơn vị thời gian. Có ai hỏi gì về định nghĩa hoặc cách giải thích hoặc thứ gì đó tương tự thế? Xin mời?

Well, you can have both not in the same small segment. But it could be that, well, imagine that my vector field accidentally goes in the opposite direction then this part of the curve, while things are flowing to the left, contributes negatively to flux. And here maybe the field is tangent so the normal component becomes zero. And then it becomes positive and this part of the curve contributes positively. For example, if you imagine that you have a round tank in which the fluid is rotating and you put your dam just on a diameter across then things are going one way on one side, the

other way on the other side, and actually it just evens out.
Vâng, bạn có thể có cả hai không chỉ trong cùng đoạn nhỏ. Nhưng nó có thể là cái đó, vâng, tưởng tượng rằng trường vector ngẫu nhiên đi theo hướng ngược lại thì phần này của đường cong, trong khi mọi thứ đang chảy sang bên trái, đóng góp phần âm vào thông lượng. Và ở đây có lẽ trường là tiếp tuyến vì vậy thành phần pháp tuyến trở thành không. Và sau đó nó thành dương và phần này của đường cong đóng góp dương. Ví dụ, nếu bạn tưởng tượng rằng bạn có một bể tròn trong đó chất lỏng đang quay và bạn đặt đập của bạn ngay trên đường kính qua thì các thứ sẽ đi theo một đường ở một phía, đường khác ở phía bên kia, và thực sự nó làm cho bằng phẳng.

We don't have complete information. It is just the total net flux. OK. If there are no other questions then I guess we will need to figure out how to compute this guy and how to actually do this line integral. Well, let's start with a couple of easy examples. Let's say that C is a circle of radius (a) centered at the origin going counterclockwise. And let's say that our vector field is xi yj.
Chúng ta không có thông tin đầy đủ. Nó chỉ là thông lượng toàn phần. Vâng. Nếu không có câu hỏi khác thì tôi đoán chúng ta sẽ cần chỉ ra cách tính thằng này và cách tính tích phân đường này. Vâng, hãy bắt đầu với một vài ví dụ dễ. Giả sử C là đường tròn bán kính (a) với tâm tại gốc tọa độ đi ngược chiều kim đồng hồ. Và giả sử rằng trường vector của chúng ta là xi yj.

What does that look like? Remember, xi plus yj is a vector field that is pointing radially away from the origin. Because at every point it is equal to the vector from the origin to that point. Now, if we have a circle and let's say we are going counterclockwise. Actually, I have a nicer picture. Let me do it here. That is my curve and my vector field. And the normal vector, see, when you go counterclockwise in a closed curve, this convention that a normal vector points to the right of curve makes it point out.
Nó có dạng như thế nào? Hãy nhớ rằng, xi cộng yj là một trường vector hướng tâm ra xa gốc tọa độ. Bởi vì tại mỗi điểm nó bằng vector từ gốc tọa độ đến điểm đó. Bây giờ, nếu chúng ta có một đường tròn và giả sử rằng chúng ta đi ngược chiều kim đồng hồ. Thực ra, tôi có hình đẹp hơn. Hãy để tôi làm điều đó ở đây. Đó là đường cong của tôi và trường vector của tôi. Và vector pháp tuyến, thấy không, khi bạn đi ngược chiều kim đồng hồ trên đường cong kín, quy ước vector pháp tuyến hướng sang phải của đường cong làm cho nó chỉ báo.

The usual convention, when you take flux for a closed curve, is that you are counting the flux going out of the region enclosed by the curve. And, of course, if you went clockwise it would be the other way around. You choose to do it the way you want, but the most common one is to count flux going out of the region. Let's see what happens. Well, if I am anywhere on my circle, see, the normal vector is sticking straight out of the circle. That is a property of the circle that the radial direction is perpendicular to the circle. Actually, let me complete this picture. If I take a point on the circle, I have my normal vector that is pointing straight out so it is parallel to F.
Quy ước thông thường, khi bạn có thông lượng của một đường cong kín, là bạn sẽ tính thông lượng đi ra ngoài của vùng được bao bởi đường cong. Và, tất nhiên, nếu bạn đã đi cùng chiều kim đồng hồ nó sẽ theo đường kia. Bạn chọn để làm nó theo cách bạn muốn, nhưng cái phổ biến nhất là tính thông lượng đi ra khỏi vùng. Hãy xem điều gì sẽ xảy ra. Vâng, nếu tôi ở bất cứ nơi nào trên đường tròn của tôi, thấy không, vector pháp tuyến đang

thọc thẳng ra khỏi đường tròn. Đó là tính chất của đường tròn trong đó hướng từ tâm ra vuông góc với đường tròn. Thực sự, hãy để tôi hoàn thành hình này. Nếu tôi lấy một điểm trên đường tròn, tôi có vector pháp tuyến hướng thẳng ra ngoài vì vậy nó song song với F.

Along C we know that F is parallel to n, so F dot n will be equal to the magnitude of F times, well, the magnitude of n, but that is one. Let me put it anywhere, but that is the unit normal vector. Now, what is the magnitude of this vector field if I am at a point x, y? Well, it is square root of x squared plus y squared, which is the same as the distance from the origin. So if this distance, if this radius is a then the magnitude of F will just be a. In fact, F dot n is constant, always equal to a. So the line integral will be pretty easy because all I have to do is the integral of F dot n ds becomes the integral of a ds.

Dọc theo C chúng ta biết rằng F song song với n, do đó F nhân vô hướng với n sẽ bằng độ lớn của F nhân, vâng, độ lớn của n, nhưng nó bằng một. Hãy để tôi đặt nó ở bất cứ đâu, nhưng đó là vector pháp tuyến đơn vị. Bây giờ, độ lớn của trường vector này là gì nếu tôi ở tại điểm x, y? Vâng, nó bằng căn bậc hai của x bình cộng y bình, tương tự như khoảng cách từ gốc tọa độ. Vì vậy, nếu khoảng cách này, do đó nếu bán kính này là độ lớn của F sẽ chính là a. Quả thực, F nhân vô hướng với n là hằng số, luôn luôn bằng a. Vì vậy, các tích phân đường sẽ khá dễ bởi vì tôi chỉ cần tính tích phân của F nhân vô hướng với n ds trở thành tích phân của a ds.

(a) is a constant so I can take it out. And integral ds is just a length of C which is 2pi a, so I will get 2pi a squared. And that is positive, as we expected, because stuff is flowing out of the circle. Any questions about that? No. OK. Just out of curiosity, let's say that we had taken our other favorite vector field. Let's say that we had the same C, but now the vector field <- y, x>.

(a) là hằng số vì vậy tôi có thể đem nó ra ngoài. Và tích phân ds chỉ là độ dài của C bằng 2pia, vì vậy tôi sẽ được 2pi a bình phương. Và nó dương, như chúng ta mong đợi, bởi vì các thứ chảy ra ngoài đường tròn. Có câu hỏi nào về điều đó không? Không. Vâng. Do tò mò, chúng ta đã chọn trường vector khác. Giả sử rằng chúng ta vẫn có đường cong C tương tự, nhưng bây giờ trường vector là<- y, x>.

Remember, that one goes counterclockwise around the origin. If you remember what we did several times, well, along the circle that vector field now is tangent to the circle. If it is tangent to the circle it doesn't have any normal component. The normal component is zero. Things are not flowing into the circle or out of it. They are just flowing along the circle around and around so the flux will be zero.

Hãy nhớ rằng, cái đó đi ngược chiều kim đồng hồ quanh gốc tọa độ. Nếu bạn còn nhớ những gì chúng ta đã làm vài lần trước, vâng, dọc theo đường tròn bây giờ trường vector tiếp xúc với đường tròn. Nếu nó tiếp tuyến với đường tròn nó không có bất kỳ thành phần pháp tuyến nào. Thành phần pháp tuyến bằng không. Không có gì chảy ra hay vào đường tròn. Chúng chỉ chảy quanh đường tròn vì vậy thông lượng sẽ bằng không.

F now is tangent to C. F dot n is zero and, therefore, the flux will be zero. These are examples where you can compute things geometrically. And I would say, generally speaking, with flux, well, if it is a very complicated field then you cannot. But, if a field is fairly simple, you should be able to get some general feeling for whether your answer should be positive, negative or zero just by thinking about which way is my flow going. Is it going across the curve one way or the other way?

F bây giờ tiếp xúc với C. F nhân vô hướng n bằng không và, do đó, thông lượng sẽ bằng không. Đây là ví dụ mà bạn có thể tính các thứ bằng hình học. Và tôi sẽ nói, nói chung, với thông lượng, vâng, nếu nó là trường rất phức tạp thì bạn không thể. Nhưng, nếu một trường khá đơn giản, bạn sẽ có thể nhận được một số cảm giác chung chung về việc kết quả của bạn sẽ là dương, âm hoặc bằng không chỉ bằng cách nghĩ về hướng chảy của dòng. Nó đi qua đường cong theo cách này hay cách đó?

Still no questions about these examples? The next thing we need to know is how we will actually compute these things because here, yeah, it works pretty well, but what if you don't have a simple geometric interpretation. What if I give you a really complicated curve and then you have trouble finding the normal vector? It is going to be annoying to set up things this way. Actually, there is a better way to do it in coordinates.

Vẫn không có câu hỏi nào về các ví dụ? Điều tiếp theo chúng ta cần biết là cách tính những cái này bởi vì, ở đây, vâng, nó hoạt động khá tốt, nhưng giá như bạn không có một cách diễn giải hình học đơn giản. Giá như tôi cho bạn một đường cong thực sự phức tạp và thế thì bạn sẽ gặp khó khăn trong việc tìm vector pháp tuyến? Thiết lập các thứ theo cách này rất phiền nhiễu. Trên thực tế, có một cách tốt hơn để thực hiện nó trong tọa độ.

Just as we do work, when we compute this line integral, usually we don't do it geometrically like this. Most of the time we just integrate M dx plus N dy in coordinates. That is a similar way to do it because it is, again, a line integral so it should work the same way. Let's try to figure that out. How do we do the calculation in coordinates, or I should say using components? That is the general method of calculation when we don't have something geometric to do. Remember, when we were doing things for work we said this vector dr, or if you prefer T ds, we said just becomes symbolically dx and dy. When you do the line integral of F dot dr you get line integral of n dx plus n dy.

Giống như khi tính công, khi chúng ta tính tích phân đường này, thông thường chúng ta không làm nó theo phương pháp hình học như thế này. Hầu như mọi lúc chúng ta chỉ cần tính tích phân M dx cộng N dy trong tọa độ. Đó là cách tương tự để làm nó vì nó cũng là một tích phân đường vì vậy nó sẽ theo quy tắc tương tự. Hãy thử chỉ ra điều đó. Làm thế nào để chúng ta tính trong hệ tọa độ, hay nói cách khác là dùng các thành phần? Đó là phương pháp tính toán chung khi chúng ta không thể áp dụng phương pháp hình học. Hãy nhớ rằng, khi chúng ta làm các thứ đối với công chúng ta đã nói vector này dr, hoặc nếu bạn thích T ds, chúng ta đã nói chỉ trở thành tượng trưng dx và dy. Khi bạn tính tích phân đường của F nhân vô hướng dr bạn được tích phân đường của n dx cộng n dy.

Now let's think for a second about how we would express n ds. Well, what is n ds compared to T ds? Well, M is just T rotated by 90 degrees, so n ds is T ds rotated by 90 degrees. That might sound a little bit outrageous because these are really symbolic notations but it works. I am not going to spend too much time trying to convince you carefully. But if you go back to where we wrote this and how we tried to justify this and you work your way through it, you will see that n ds can be analyzed the same way. N is T rotated 90 degrees clockwise. That tells us that n ds is –

Hãy suy nghĩ xem chúng ta sẽ biểu diễn n ds như thế nào. Vâng, n ds là gì so với T ds? Vâng, M chỉ là T xoay 90 độ, do đó n ds là T ds được quay 90 độ. Điều đó có vẻ thái quá một chút vì đây thực sự là những ký hiệu tượng trưng nhưng nó phù hợp. Tôi sẽ không sử dụng quá nhiều thời gian để thuyết phục bạn. Nhưng nếu bạn quay lại nơi chúng ta đã viết cái này và cách chúng ta chứng minh điều này và bạn làm việc theo cách của bạn thông qua nó, bạn sẽ thấy rằng n ds có thể được phân tích theo cùng một cách. N là T được xoay 90 độ cùng chiều kim đồng hồ. Điều đó cho chúng ta biết rằng n ds là -

How do we rotate a vector by 90 degrees? Well, we swept the two components and we put a minus sign. You have dy and dx. And you have to be careful where to put the minus sign. Well, if you are doing it clockwise, it is in front of dx. Well, actually, let me just convince you quickly. Let's say we have a small piece of C. If we do T delta S, that is also vector delta r. That is going to be just the vector that goes along the curve given by this. Its components will be indeed the change in x, delta x, and the change in y, delta y.

Chúng ta quay một vector 90 độ như thế nào? Vâng, chúng ta quét hai thành phần và chúng ta đặt một dấu trừ. Bạn có dy và dx. Và bạn phải cẩn thận nơi đặt dấu trừ. Vâng, nếu bạn đang làm nó theo chiều kim đồng hồ, nó ở trước dx. Vâng, thực sự, hãy để tôi chứng minh cho bạn thấy. Giả sử rằng chúng ta có một đoạn nhỏ của C. Nếu chúng ta tính T delta S, đó cũng là vector delta r. Đó sẽ chỉ là vector đi dọc theo đường cong được cho bởi cái này. Các thành phần của nó sẽ là sự thay đổi của x, delta x, và sự thay đổi của y, delta y.

And now, if I want to get n delta S, well, I claim now that it is perfectly valid and rigorous to just rotate that by 90 degrees. If I want to rotate this by 90 degrees clockwise then the x component will become the same as the old y component. And the y component will be minus delta x. Then you take the limit when the segment becomes shorter and shorter, and that is how you can justify this. That is the key to computing things in practice. It means, actually, you already know how to compute line integrals for flux. Let me just write it explicitly.

Và bây giờ, nếu tôi muốn nhận được n delta S, vâng, bây giờ tôi cho rằng nó hoàn toàn hợp lệ và chặt chẽ để quay cái đó 90 độ. Nếu tôi muốn quay cái này 90 độ cùng chiều kim đồng hồ thì thành phần x sẽ trở thành giống như thành phần y cũ. Và thành phần y sẽ là trừ delta x. Sau đó, bạn lấy giới hạn khi đoạn trở nên ngày càng ngắn hơn, và đó là cách bạn có thể chứng minh điều này. Đó là chìa khóa để tính các thứ trong thực tế. Nó có nghĩa là, trên thực tế, bạn đã biết cách tính tích phân đường cho thông lượng. Hãy để tôi viết nó một cách rõ ràng.

Let's say that our vector field has two components. And let me just confuse you a little bit and not call them M and N for this time just to stress the fact that we are doing a different line integral. Let me call them P and Q for now. Then the line integral of F dot n ds will be the line integral of <P, Q> dot product <dy,- dx>. That will be the integral of - Q dx P dy. Well, I am running out of space here. It is integral along C of negative Q dx plus P dy.

Giả sử rằng trường vector của chúng ta có hai thành phần. Và hãy để tôi làm cho bạn nhầm lẫn một chút và không gọi M và N lúc này chỉ để nhấn mạnh một việc là chúng ta đang tính tích phân đường khác. Bây giờ, hãy để tôi gọi chúng là P và Q. Thế thì, tích phân đường của F dot n ds sẽ là tích phân đường của <P, Q> dot <dy,- dx>. Nó sẽ là tích phân của – Q dx P dy. Vâng, tôi chạy ra khỏi không gian ở đây. Nó không phải là tích phân dọc theo C của trừ Q dx cộng P dy.

And from that point onwards you just do it the usual way. Remember, here you have two variables x and y but you are integrating along a curve. If you are integrating along a curve x and y are related. They depend on each other or maybe on some other parameter like T or theta or whatever. You express everything in terms of a single variable and then you do a usual single integral. Any questions about that? I see a lot of confused faces so maybe I shouldn't have called my component P and Q.
Và từ điểm đó về trước bạn chỉ cần làm nó theo cách bình thường. Hãy nhớ rằng, ở đây bạn có hai biến x và y nhưng bạn đang lấy tích phân dọc theo một đường cong. Nếu bạn đang lấy tích phân dọc theo đường cong x và y có liên quan. Chúng phụ thuộc vào nhau hoặc theo một tham số khác chẳng hạn như t hoặc theta hay gì đó. Bạn biểu diễn mọi thứ theo một biến và sau đó bạn tính tích phân một biến thông thường. Có câu hỏi nào về điều đó không? Tôi thấy rất nhiều khuôn mặt bối rối có lẽ tôi không nên gọi các thành phần của tôi là P và Q.

If you prefer, if you are really sentimentally attached to M and N then this new line integral becomes the integral of - N dx M dy. If a problem tells you compute flux instead of saying compute work, the only thing you change is instead of doing M dx plus N dy you do minus N dx plus M dy. And I am sorry to say that I don't have any good way of helping you remember which one of the two gets the minus sign, so you just have to remember this formula by heart. That is the only way I know.
Nếu bạn thích, nếu bạn đã gắn bó thực sự với M và N thì tích phân đường mới này trở thành tích phân của - N dx M dy. Nếu bài toán yêu cần bạn tính thông lượng thay vì tính công, thứ duy nhất bạn cần chú ý là thay vì Mdx cộng N dy bạn đổi thành trừ Ndx cộng M dy. Và tôi rất tiếc là không có cách nào để giúp bạn nhớ cái nào trong hai cái có dấu trừ, vì vậy bạn phải học thuộc lòng công thức này. Đó là cách duy nhất tôi biết.

Well, you can try to go through this argument again, but it is really best if you just remember that formula. I am not going to do an example because we already know how to do line integrals. Hopefully you will get to see one at least in recitation on Monday. That is all pretty good. Let me tell you now what if I have to compute flux along a closed curve and I don't want to compute it? Well, remember in the case of work we had Green's theorem. We saw yesterday Green's theorem. Let's us replace a line integral along a closed curve by a double integral. Well, here it is the same. We have a line integral along a curve. If it is a closed curve, we should be able to replace it by a double integral. There is a version of Green's theorem for flux.
Vâng, bạn có thể làm lại lập luận này, nhưng tốt hơn cả là bạn nên nhớ công thức đó. Tôi sẽ không làm ví dụ vì chúng ta đã biết cách tính tích phân đường rồi. Hy vọng bạn sẽ được làm một ví dụ vào buổi trả lời câu hỏi miệng vào thứ hai. Điều đó khá tốt. Hãy để tôi nói cho bạn biết ngay bây giờ giả dụ như tôi được yêu cầu tính thông lượng dọc theo đường cong kín và tôi không muốn tính nó? Vâng, hãy nhớ rằng trong trường hợp của công chúng ta đã có định lý Green. Hôm qua chúng ta đã học định lí Green. Chúng ta hãy thay tích phân đường dọc theo đường cong kín bằng tích phân kép. Vâng, ở đây cũng tương tự. Chúng ta có tích phân đường dọc theo đường cong. Nếu nó là một đường cong khép kín, chúng ta sẽ có thể thay nó bằng một tích phân kép. Có một phiên bản khác của định lý Green cho thông lượng.

And you will see it is not scarier than the other one. It is perhaps less scarier or perhaps just as scary or just not as scary, depending on how you feel about it, but it works pretty much the same way. What does Green's theorem for flux say? It says if

C is a curve that encloses a region R counterclockwise and if I have a vector field that is defined everywhere, not just on C but also inside, so also on R.

Và bạn sẽ thấy nó không đáng sợ hơn cái còn lại. Có lẽ là ít đáng sợ hơn hoặc có thể là đáng sợ hay không phụ thuộc vào cảm giác của bạn, nhưng quy luật của nó giống nhau nhiều. Định lý Green cho thông lượng nói gì? Nó nói nếu C là một đường cong bao quanh một vùng R ngược chiều kim đồng hồ và nếu tôi có một trường vector xác định ở mọi nơi, không chỉ trên C mà còn bên trong, do đó R cũng vậy.

Well, maybe I should give names to the components. If you will forgive me for a second, I will still use P and Q for now. You will see why. It is defined and differentiable in R. Then I can actually -- -- replace the line integral for flux by a double integral over R of some function. And that function is called the divergence of F dA. This is the divergence of F. And I have to define for you what this guy is.

Vâng, có lẽ tôi nên đặt tên cho các thành phần. Nếu bạn tha thứ cho tôi lần hai, tôi vẫn sẽ sử dụng P và Q. Bạn sẽ biết lí do. Nó được xác định và khả vi trong R. Thế thì tôi có thể -- thay tích phân đường đối với thông lượng bởi tích phân kép trên R của hàm nào đó. Và hàm đó được gọi là divergence của F dA. Đây là divergence của F. Và tôi phải xác định cho bạn thằng này là gì.

The divergence of a vector field with components P and Q is just P sub x Q sub y. This one is actually easier to remember than curl because you just take the x component, take its partial with respect to x, take the y component, take its partial with respect to y and add them together. No signs. No switching things around. This one is pretty straightforward. The picture again is if I have my curve C going counterclockwise around a region R and I want to find the flux of some vector field F that is everywhere in here.

Divergence của một trường vectơ với các thành phần P và Q chỉ là P x Q y. Cái này thực sự dễ nhớ hơn curl bởi vì bạn chỉ cần lấy thành phần x, lấy đạo hàm riêng của nó theo x, lấy thành phần y, lấy đạo hàm riêng của nó theo y và cộng lại. Không có dấu. Không có chuyển đổi các thứ. Cái này khá trực tiếp. Một lần nữa ý tưởng lại là nếu tôi có đường cong C đi ngược chiều kim đồng hồ quanh vùng R và tôi muốn tìm thông lượng của trường vector F nào đó ở mọi nơi trong đây.

Maybe some parts of C will contribute positively and some parts will contribute negatively. Just to reiterate what I said, positively here means, because we are going counterclockwise, the normal vector points out of the region. This guy here is the flux out of R through C. That is the formula. Any questions about what the statement says or how to use it concretely? No. OK. It is pretty similar to Green's theorem for work. Actually, I should say –

Có lẽ một số phần của C sẽ dương và một số phần sẽ âm. Chỉ là nhắc lại những gì tôi đã nói, dương ở đây có nghĩa là, bởi vì ở đây chúng ta đi ngược chiều kim đồng hồ, vector pháp tuyến hướng ra ngoài vùng. Thằng này ở đây là thông lượng do R qua C. Đó là công thức. Có câu hỏi nào về ý nghĩa của phát biểu này hoặc cách dùng nó trong trường hợp cụ thể không? Không. Được rồi. Nó khá giống với định lí Green cho công. Thực ra, tôi nên nói -

This is called Green's theorem in normal form also. Not that the other one is abnormal, but just that the old one for work was, you could say, in tangential form. That just means, well, Green's theorem, as seen yesterday was for the line integral F dot T ds, integrating the tangent component of F. The one today is for integrating the normal component of F. OK. Let's prove this. Good news. It is much easier to prove than the one we did yesterday because we are just going to show that it is the same thing just using different notations.

Đây được gọi là định lý Green dưới dạng chuẩn tắc. Không phải dạng kia là không chuẩn tắc, cái cũ đó để tính công, bạn có thể nói, dưới hình thức tiếp tuyến. Điều đó có nghĩa là, vâng, định lý Green, như đã thấy hôm qua là cho tích phân đường F dot T ds, lấy tích phân thành phần tiếp tuyến của F. Cái hôm nay là lấy tích phân thành phần pháp tuyến của F. Được rồi. Hãy chứng minh điều này. Tin tốt. Nó dễ hơn chứng minh mà chúng ta đã làm hôm qua vì chúng ta chỉ cần làm tương tự nhưng dùng ký hiệu khác.

How do I prove it? Well, maybe actually it would help if first, before proving it, I actually rewrite what it means in components. We said the line integral of F dot n ds is actually the line integral of - Q dx P dy. And we want to show that this is equal to the double integral of P sub x Q sub y dA. This is really one of the features of Green's theorem. No matter which form it is, it relates a line integral to a double integral. Let's just try to see if we can reduce it to the one we had yesterday. Let me forget what these things mean physically and just focus on the math. On the math it is a line integral of something dx plus something dy.

Tôi chứng minh điều đó như thế nào? Vâng, có lẽ thực sự nó sẽ giúp nếu đầu tiên, trước khi chứng minh nó, tôi viết lại nó theo các thành phần. Chúng ta đã nói tích phân đường của F dot n ds thực sự là tích phân đường của - Q dx P dy. Và chúng ta muốn chứng minh rằng cái này bằng tích phân kép của P x Q y dA. Đây thực sự là một trong những tính chất của định lí Green. Nó ở dạng nào không quan trọng, nó thiết lập mối quan hệ giữa tích phân đường với tích phân kép. Hãy thử xem chúng ta có thể rút nó về cái chúng ta đã có hôm qua không. Hãy để tôi quên đi ý nghĩa vật lí của nó và chỉ tập trung vào toán học. Về toán học nó là tích phân đường của cái gì đó dx cộng cái gì đó dy.

Let's call this guy M and let's call this guy N. Let M equal negative Q and N equal P. Then this guy here becomes integral of M dx plus N dy. And I know from yesterday what this is equal to, namely using the tangential form of Green's theorem. Green for work. This is the double integral of curl of this guy. That is Nx minus My dA. But now let's think about what this is in terms of M and N. Well, we said that M is negative Q so this is negative My. And we said P is the same as N, so this is Nx.

Hãy gọi thằng này là M và thằng này là N. Cho M bằng trừ Q và N bằng P. Thế thì, ở đây thằng này trở thành tích phân của M dx cộng N dy. Và tôi biết từ hôm qua cái này bằng gì, cụ thể là sử dụng dạng tiếp tuyến của định lý của Green. Green cho công. Đây là tích phân kép của curl của thằng này. Đó là Nx trừ My dA. Nhưng bây giờ chúng ta hãy xem đây là gì theo M và N. Vâng, chúng ta đã nói rằng M là trừ Q vì vậy đây là trừ My. Và chúng ta đã nói P giống như N, vì vậy đây là Nx.

Just by renaming the components, I go from one form to the other one. So it is really the same theorem. That's why it is also called Green's theorem. But the way we think about it when we use it is different, because one of them computes the work done by a force along a closed curve, the other one computes the flux maybe of a velocity field out of region. Questions? Yes? That is correct. If you are trying to compute a line integral for flux, wait, where did I put it? A line integral for flux just becomes this. And once you are here you know how to compute that kind of thing. The double integral side does not even have any kind of renaming to do.

Chỉ cần bằng cách đổi tên các thành phần, tôi đi từ dạng này sang dạng khác. Vì vậy, nó thực sự là cùng một định lý. Đó là lý do tại sao nó cũng được gọi là Định lý Green. Nhưng cách mà chúng ta nghĩ về nó khi chúng ta dùng nó là khác, bởi vì một trong số chúng tính công được thực hiện bởi một lực dọc theo đường cong kín, trong khi cái kia tính thông lượng có thể là của một trường vận tốc ra khỏi một vùng. Câu hỏi? Xin mời? Đúng vậy. Nếu bạn thử tính tích phân cho thông lượng, chờ chút, tôi đặt nó ở đâu? Tích phân đường của thông lượng trở thành cái này. Và một khi bạn ở đây bạn biết cách tính thứ đó. Bên vế tích phân kép không cần phải đặt lại tên.

You know how to compute a double integral of a function. This is just a particular kind of function that you get out of a vector field, but it is like any function. The way you would evaluate these double integrals is just the usual way. Namely, you have a function of x and y, you have a region and you set up the bounds for the isolated integral. The way you would evaluate the double integrals is really the usual way, by slicing the region and setting up the bounds for iterated integrals in dx, dy or dydx or maybe rd, rd theta or whatever you want.

Bạn không biết cách tính tích phân kép của một hàm. Đây chỉ là một loại hàm đặc biệt mà bạn lấy ra từ trường vector, nhưng nó cũng giống như bất kỳ hàm nào. Bạn tính tích phân kép này theo cách bình thường. Cụ thể, bạn có một hàm của x và y, bạn có một vùng và bạn thiết lập các biên cho tích phân cô lập. Bạn tính tích phân kép theo cách bình thường, bằng cách cắt vùng và tìm các cận của các tích phân lặp theo dx, dy hoặc dydx hoặc rd, rd theta hoặc bất cứ cái nào bạn muốn.

In fact, in terms of computing integrals, we just have two sets of skills. One is setting up and evaluating double integrals. The other one is setting up and evaluating line integrals. And whether these line integrals or double integrals are representing work, flux, integral of a curve, whatever, the way that we actually compute them is the same. Let's do an example. Oh, first. Sorry. This renaming here, see, that is why actually I call my components P and Q because the argument would have gotten very messy if I had told you now I call M ,N and I call N minus M and so on.

Trong thực tế, qua việc tính các tính phân, chúng ta có hai kỹ năng. Một là thiết lập và tính tích phân kép. Cái kia là thiết lập và tính tích phân đường. Và cho dù là các tích phân đường hoặc tích phân kép này biểu diễn công, thông lượng, tích phân của đường cong, bất cứ cái gì, cách chúng ta tính cũng như nhau. Hãy xét một ví dụ. Oh, trước hết. Xin lỗi. Cái này đổi tên ở đây, thấy không, đó là lý do tại sao tôi gọi các thành phần của tôi là P và Q bởi vì các lập luận sẽ trở nên rất lộn xộn nếu bây giờ tôi bảo bạn tôi gọi M, N và tôi gọi N trừ M và v.v…

But, now that we are through with this, if you still like M and N better, you know, what this says -- The formulation of Green's theorem in this language is just integral of minus N dx plus M dy is the double integral over R of Mx plus Ny dA. Now let's do an example. Let's look at this picture again, the flux of xi plus yj out of the circle of radius A. We did the calculation directly using geometry, and it wasn't all that bad. But let's see what Green's theorem does for us here.

Nhưng, bây giờ chúng ta thông qua điều này, nếu bạn vẫn thấy M và N tốt hơn, bạn biết, điều này cho biết - Việc xây dựng định lý Green trong ngôn ngữ này chỉ là tính tích phân của trừ Ndx cộng với M dy bằng tích phân kép trên R của Mx cộng Ny dA. Bây giờ hãy làm một ví dụ. Lại xét hình này, thông lượng của xi cộng yj ra khỏi đường tròn bán kính a. Chúng ta đã tính toán trực tiếp bằng cách sử dụng hình học, và nó không xấu gì cả. Nhưng hãy xem định lí Green giúp ích cho chúng ta điều gì ở đây.

Example. Let's take the same example as last time. F equals xi yj. C equals circle of radius a counterclockwise. How do we set up Green's theorem. Well, let's first figure out the divergence of F. The divergence of this field, I take the x component, which is x, and I take its partial respect to x. And then I do the same with the y component, and I will get one plus one equals two. So, the divergence of this field is two. Now, Green's theorem tells us that the flux out of this region is going to be the double integral of 2 dA. What is R now?
Ví dụ. Chúng ta hãy lấy ví dụ tương tự như lần trước. F bằng xi yj. C là đường tròn bán kính a ngược chiều kim đồng hồ. Chúng ta thiết lập định lí Green như thế nào. Vâng, trước hết hãy chỉ ra divergence của F. Divergence của trường này, tôi lấy thành phần x, nó là x, và tôi lấy đạo hàm riêng của nó theo x. Và sau đó tôi làm như vậy với thành phần y, và tôi sẽ được một cộng với một bằng hai. Vì vậy, divergence của trường này bằng hai. Bây giờ, định lí Green cho chúng ta biết rằng thông lượng ra khỏi vùng này sẽ là tích phân kép của 2 dA. Bây giờ R là gì?

Well, R is the region enclosed by C. So if C is the circle, R is the disk of radius A. Of course, we can compute it, but we don't have to because double integral of 2dA is just twice the double integral of dA so it is twice the area of R. And we know the area of a circle of radius A. That is piA2. So, it is 2piA2. That is the same answer that we got directly, which is good news. Now we can even do better. Let's say that my circle is not at the origin. Let's say that it is out here. Well, then it becomes harder to calculate the flux directly. And it is harder even to guess exactly what will happen because on this side here the vector field will go into the region so the contribution to flux will be negative here. Here it will be positive because it is going out of the region.
Vâng, R là vùng được bao quanh bởi C. Vì vậy, nếu C là đường tròn, R là đĩa bán kính a. Tất nhiên, chúng ta có thể tính nó, nhưng không cần thiết vì tích phân kép của 2dA chính là bằng hai lần của dA vì vậy nó bằng hai lần diện tích R. Và chúng ta biết diện tích đường tròn bán kính a. Đó là pia2. Vì vậy, nó là 2pia2. Đó là câu trả lời tương tự mà chúng ta nhận được trực tiếp, đó là tin tốt. Bây giờ chúng ta thậm chí có thể làm tốt hơn. Giả sử rằng đường tròn của tôi không ở gốc tọa độ. Giả sử rằng nó ở ngoài đây. Vâng, thế thì sẽ khó tính thông lượng một cách trực tiếp. Và thậm chí khó đoán những gì xảy ra hơn bởi vì ở phía này trường vector sẽ đi vào trong vùng vì vậy đóng góp vào thông lượng sẽ là âm ở đây. Ở đây nó sẽ dương bởi vì nó sẽ đi ra ngoài vùng.

There are positive and negative terms. Well, it looks like positive should win because here the vector field is much larger than over there. But, short of computing it, we won't actually know what it is. If you want to do it by direct calculation then you have to parametize this circle and figure out what the line integral will be. But if you use Green's theorem, well, we never used the fact that it is the circle of radius A at the origin.

Đó là các số hạng dương và âm. Vâng, có vẻ như phần dương sẽ thắng vì ở đây trường vector lớn hơn nhiều so với ở đó. Tuy nhiên, nếu không tính, chúng ta sẽ không biết nó là gì. Nếu bạn muốn làm điều đó bằng cách tính trực tiếp thì bạn phải tham số hóa đường tròn này và chỉ ra tích phân đường sẽ là gì. Nhưng nếu bạn sử dụng định lý Green, vâng, chúng ta không bao giờ dùng dữ kiện nó là đường tròn bán kính a tại gốc tọa độ.

It is true actually for any closed curve that the flux out of it is going to be twice the area of the region inside. It still will be 2piA2 even if my circle is anywhere else in the plane. If I had asked you a trick question where do you want to place this circle so that that the flux is the largest? Well, the answer is it doesn't matter. Now, let's just finish quickly by answering a question that some of you, I am sure, must have, which is what does divergence mean and what does it measure? I mean, we said for curl, curl measures how much things are rotating somehow. What does divergence mean? Well, the answer is divergence measures how much things are diverging. Let's be more explicit.

Điều đó là đúng cho bất kì đường cong kín nào mà thông lượng ra ngoài nó sẽ bằng hai lần diện tích của vùng bên trong. Nó vẫn sẽ là 2pia2 cho dù đường tròn của tôi ở bất cứ đâu trong mặt phẳng. Nếu tôi hỏi bạn một câu hỏi hóc búa bạn sẽ đặt đường tròn này ở đâu để cho thông lượng lớn nhất? Vâng, câu trả lời là không có vấn đề gì. Bây giờ, chúng ta hãy nhanh chóng kết thúc bằng cách trả lời câu hỏi mà một số bạn, tôi chắc chắn, phải có, đó là ý nghĩa của divergence và nó đo gì? Ý tôi là, chúng ta đã nói về curl, curl đo các thứ quay nhiều bao nhiêu. Ý nghĩa của divergence là gì? Vâng, câu trả lời là divergence đo các thứ phân kì nhiều bao nhiêu. Tôi sẽ làm rõ vấn đề này hơn.

Interpretation of divergence. You can think of it, you know, what do I want to say first? If you take a vector field that is a constant vector field where everything just translates then there is no divergence involved because the derivatives will be zero. If you take the guy that rotates things around you will also compute and find zero for divergence. This is not sensitive to translation motions where everything moves together or to rotation motions, but instead it is sensitive to explaining motions. A possible answer is that it measures how much the flow is expanding areas.

Giải thích sự phân kỳ. Bạn có thể nghĩ về nó, bạn biết, trước tiên tôi muốn nói gì? Nếu bạn chọn một trường vectơ là một trường vectơ hằng số ở đó mọi thứ chỉ dịch chuyển thì không có sự phân kì liên quan bởi vì đạo hàm sẽ bằng không. Nếu bạn chọn thằng quay các thứ xung quanh bạn cũng sẽ tính và thấy rằng divergence cũng bằng không. Cái này không nhạy với chuyển động tịnh tiến ở đó mọi thứ chuyển động cùng nhau hoặc quay cùng nhau, nhưng nó nhạy với các chuyển động có giãn nở. Một câu trả lời có thể có là nó đo dòng đang làm giãn diện tích nhiều bao nhiêu.

If you imagine this flow that we have here on the picture, things are moving away from the origin and they fill out the plane. If we mention this fluid flowing out there, it is occupying more and more space. And so that is what it means to have positive divergence. If you took the opposite vector field that contracts everything to the origin that will have negative divergence. That is a good way to think about it if you are thinking of a gas maybe that can expand to fill out more volume. If you thinking of water, well, water doesn't really shrink or expand. The fact that it is taking more and more space actually means that there is more and more water. The other way to think about it is divergence is the source rate, it is the amount of fluid that is being inserted into the system, that is being pumped into the system per unit time per unit area.

Nếu bạn tưởng tượng rằng dòng mà chúng ta có ở đây trên hình, các thứ đi ra xa gốc tọa độ và chúng phồng ra trong mặt phẳng. Nếu chất lỏng này chảy ra khỏi đó, nó sẽ chiếm ngày càng nhiều không gian hơn. Và vì vậy đó chính là divergence dương. Nếu bạn chọn trường vector ngược lại co mọi thứ vào gốc tọa độ thì sẽ có divergence âm. Đó là một cách hay để nghĩ về nó, nếu bạn đang nghĩ đến một chất khí làm phồng to thể tích. Nếu bạn nghĩ đến nước, vâng, nước không co lại hoặc giãn nở. Việc nó chiếm càng nhiều không gian hơn có nghĩa là có càng nhiều nước hơn. Một cách khác để nghĩ về nó là divergence là tốc độ nguồn, đó là lượng chất lỏng được đưa vào hệ thống, đang được bơm vào hệ thống trên một đơn vị thời gian trên một đơn vị diện tích.

What div F equals two here means is that here you actually have matter being created or being pumped into the system so that you have more and more water filling more and more space as it flows. But, actually, divergence is not two just at the origin. It is two everywhere. So, in fact, to have this you need to have a system of pumps that actually is in something water absolutely everywhere uniformly.
div F bằng hai ở đây có nghĩa là ở đây bạn thực sự có vật chất được tạo ra hoặc đang được bơm vào hệ thống để bạn có ngày càng nhiều nước hơn ngày càng làm đầy không gian hơn khi nó chảy. Tuy nhiên, trên thực tế, divergence không bằng hai ngay tại gốc tọa độ. Nó bằng hai ở mọi nơi. Vì vậy, trên thực tế, để có điều này, bạn cần phải có một hệ thống bơm là nước tuyệt đối đồng đều ở mọi nơi.

That is the only way to do this. I mean if you imagine that you just have one spring at the origin then, sure, water will flow out, but as you go further and further away it will do so more and more slowly. Well, here it is flowing away faster and faster. And that means everywhere you are still pumping more water into it. So, that is what divergence measures.
Đó là cách duy nhất để làm điều này. Ý tôi là nếu bạn tưởng tượng rằng bạn có một dòng suối ở gốc tọa độ thì, chắc chắn, nước sẽ chảy ra, nhưng khi bạn đi ngày càng xa hơn nó sẽ chảy ngày càng chậm hơn. Vâng, ở đây nó chảy ra ngày càng nhanh hơn. Và điều đó có nghĩa là ở khắp mọi nơi bạn vẫn đang bơm thêm nước vào nó. Vì vậy, đó là những gì divergence đo.